# 6. Anexo

## 6.1. Dinâmica da Economia

A taxa de juros (taxa SELIC e LIBOR) segue um modelo CIR. Ou seja, o processo da taxa de juros (neutro ao risco) é descrito por:

$$dJ_t = \alpha(J^* - J_t)dt + \sigma_1\sqrt{J_t}dz_t^1$$

onde:

$J_t$: taxa de juros (SELIC ou LIBOR) no instante t

$\alpha$: velocidade de reversão à média da taxa de juros

$J^*$: média de longo prazo da taxa de juros

$\sigma_1$: volatilidade da taxa de juros

$dz_t^1$: processo de Wiener

O modelo CIR, exibe a propriedade de reversão à média, onde os parâmetros "$\alpha$" e "$J^*$" são, respectivamente, a velocidade de reversão à média e a média de longo prazo. Dado $\alpha$>0, sempre que a taxa corrente estiver abaixo da média de longo prazo, $J_t < J^*$, o termo de tendência é positivo, $\alpha$ ($J^*$ - $J_t$)>0, fazendo com que a taxa corrente aumente. Da mesma forma, se a taxa corrente está acima da média de longo prazo, $J_t > J^*$, o termo de tendência torna-se negativo, $\alpha$ ($J^*$ - $J_t$)<0, provocando uma diminuição na taxa corrente. Tal reversão à média parece uma hipótese bastante razoável e uma propriedade desejável em modelos de taxas de juros.

O modelo CIR, ao introduzir o termo $J_t^{1/2}$ na componente de volatilidade, elimina a possibilidade do aparecimento de taxas de juros de curto prazo negativas.

O preço dos títulos (e, conseqüentemente, a estrutura a termo da taxa de juros) pode ser derivado do modelo CIR. Mais especificamente, o preço dos títulos prefixados é dado por:

$$P(t,T) = A(t,T)e^{-B(t,T)J}$$

onde:

$$B(t,T)=\frac{2\left(e^{\gamma(T-t)}-1\right)}{(\gamma+\alpha)\left(e^{\gamma(T-t)}-1\right)+2\gamma}$$

$$A(t,T)=\left[\frac{2\gamma e^{(\alpha+\gamma)(T-t)/2}}{(\gamma+\alpha)\left(e^{\gamma(T-t)}-1\right)+2\gamma}\right]^{2\alpha J^*{}_1/\sigma_1^2}$$

$$\gamma=\sqrt{\alpha^2+2\sigma_1^2}$$

Deve-se observar, entretanto, que o modelo CIR não representa precisamente os preços de mercado e, por isso, não reflete com precisão a economia brasileira. Entretanto este não é nosso objetivo. Com o propósito de gerar cenários de estado estacionário, com taxa de juros em seu nível de equilíbrio, o modelo CIR tem um forte apelo intuitivo, pois possui uma fórmula explicita para o preço dos títulos e é baseada em um modelo de equilíbrio. Outros modelos mais precisos de precificação, como o HJM, não apresentam estas vantagens e são modelos de previsão tão arbitrários quanto o CIR.

Para a taxa real de câmbio, foi adotado um modelo CKLS[1], com o expoente da taxa no termo de volatilidade igual a um, onde seu processo seria descrito por:

$$dC_t=\beta(C^*-C_t)dt+\sigma_2 C_t dz_t^2$$

em que:

$C_t$ : taxa de câmbio real no instante t

$\beta$ : velocidade de reversão à média da taxa de câmbio real

$C^*$ : média de longo prazo da taxa de câmbio real

$\sigma_2$ : volatilidade da taxa de câmbio real

$dz_t^2$ : processo de Wiener

O modelo CKLS é uma generalização do modelo CIR que pode ser escrito como $dr_t=a(b-r_t)dt+\sigma r_t^\gamma dz$. Estamos, portanto, usando um modelo deste tipo para a taxa de câmbio real, com $\gamma=1$.

A equação do câmbio real pode ser rescrita como:

$$\frac{dC_t}{C_t}=\beta\left(\frac{C^*}{C_t}-1\right)dt+\sigma_2 dz_t^2$$

[1] O modelo CKLS é uma generalização do modelo CIR.

Notemos que $C^* / C_t$ nada mais é do que o desvio (na realidade o inverso do desvio) da taxa de câmbio real com relação ao seu valor de equilíbrio. Neste caso, quando a taxa de câmbio encontra-se desvalorizada, isto é, $C^* / C_t < 1$, temos $E\left[dC_t / C_t\right] < 0$, ou seja, espera-se uma valorização real do câmbio. Resumindo, o processo adotado para o câmbio real exibe reversão à média e faz com que a componente de volatilidade da taxa de variação do câmbio não dependa do nível da taxa de câmbio.

Já para o índice de preços, foi definido um processo browniano geométrico:

$$dI_t = \mu I_t dt + \sigma_3 I_t dz_t^3$$

em que:

$I_t$ : índice de preços no instante t

$\mu$ : taxa média de crescimento do índice de preços

$\sigma_3$ : volatilidade do índice de preços

$dz_t^3$ : processo de Wiener

O processo de Wiener utilizado nos três modelos é um processo de Markov. Se "z" segue um processo de Wiener e é observada uma pequena mudança em "z", Δz, em um pequeno intervalo de tempo Δt, então o processo de difusão de "z" tem as seguintes propriedades: (i) $\Delta z = \varepsilon \sqrt{\Delta t}$ , em que $\varepsilon \approx N(0,1)$ e (ii) para dois intervalos Δt distintos, os Δz correspondentes são independentes (Markov).

Uma variável "x" segue um processo de Wiener generalizado, se seu processo de difusão pode ser escrito como:

$$dx = adt + bdz$$

em que "z" segue um processo de Wiener, como o descrito acima. Esse processo de Wiener generalizado já traz a idéia de uma componente de tendência ($adt$) e outra de volatilidade ($bdz$).

O processo de Itô é uma extensão do processo de Wiener generalizado em que os coeficientes das componentes de tendência e volatilidade são variáveis, podendo depender do valor da própria variável cujo processo está sendo descrito e do tempo. Assim, um processo de Itô, pode ser escrito como:

$$dx = a(x,t)dt + b(x,t)dz$$

Portanto, o processo que estamos adotando para o índice de preços é um processo de Itô em particular:

$$dI_t = \mu I_t dt + \sigma_3 I_t dz_t^3$$

Por também ser muito utilizado, esse processo recebe um nome especial, de movimento browniano geométrico[2]. Ele também pode ser escrito como:

$$\frac{dI_t}{I_t} = \mu dt + \sigma_3 dz$$

Portanto, a taxa de variação da inflação tem uma componente de tendência constante. Além disso, essa taxa, para qualquer intervalo de tempo pequeno, é normalmente distribuída e dado dois intervalos pequenos de tempo distintos, as taxas de variação são distintas. Podemos escrever que:

$$\frac{dI_t}{I_t} \approx N(\mu, \sigma_3)$$

Foi usado ainda um processo determinístico, referente ao índice de preços externo, dado por:

$$dI_t^e = \mu^e I_t^e dt$$

em que:

$I_t^e$ : índice de preços externo no instante t

$\mu^e$ : taxa de crescimento do índice de preços externo

Sabe-se que a taxa de câmbio nominal $N_t$ pode ser calculada como:

$$N_t = \frac{I}{I_t^e} C_t$$

Aplicando-se o lema de Itô nesta última equação, o processo da taxa de câmbio nominal é definido como:

$$dN_t = N_t \left[ \frac{dI_t}{I_t} + \frac{dC_t}{C_t} - \frac{dI_t^e}{I_t^e} + 2\rho_{23}\sigma_2\sigma_3 dt \right]$$

onde:

$\rho_{23}$: coeficiente de correlação entre a taxa de câmbio real e a taxa de inflação interna

Finalmente, a partir dos processos de difusão do câmbio real e dos índices de preços interno e externo, se obtém o processo para a taxa de câmbio nominal:

[2] Esse é um processo utilizado em física atômica, para descrever o movimento dos átomos.

$$\frac{dN_t}{N_t} = \left[ \beta \left( \frac{I_t}{I_t^e} \frac{C^*}{N_t} - 1 \right) + \mu - \mu_e + 2\rho_{23}\sigma_2\sigma_3 \right] dt + \sigma_2 dz_t^2 + \sigma_3 dz_t^3$$

O cenário de PIB real também é estocástico e modelado por um movimento browniano geométrico.

$$\frac{dPIB_t}{PIB_t} = \mu_{PIB} dt + \sigma_4 dz$$

Portanto, a taxa de variação do PIB tem uma componente de tendência constante ($\mu_{PIB}$). Além disso, essa taxa, para qualquer intervalo de tempo pequeno, é normalmente distribuída de maneira que:

$$\frac{dPIB_t}{PIB_t} \approx N(\mu_{PIB}, \sigma_4)$$

Finalizando, o PIB nominal é a combinação do real com o cenário de inflação.

## 6.2. Consistência Macroeconômica

Cada um dos três processos primitivos modelados (juros, câmbio real e inflação) tem um termo aleatório, caracterizado pelo processo de Wiener. Entretanto, sabe-se que há correlação entre as variáveis macroeconômicas. Por exemplo, é difícil imaginar uma situação na qual os juros caiam ao mesmo tempo em que a inflação sobe. Dessa forma, a fim de se ter uma consistência macroeconômica para o modelo, é utilizada o método de fatoração de Cholesky para criar números aleatórios correlacionados.

Considere uma matriz de covariância estimada para as variáveis macroeconômicas **S**. Como a matriz de covariância é sempre simétrica e positiva semi-definida, ela pode ser decomposta $\mathbf{S} = \mathbf{CC}^T$, onde **C** é uma matriz triangular inferior. Considere $\boldsymbol{\omega}_t$ um vetor com *n* variáveis aleatórias com distribuição normal e $\mathbf{dz}_t$ o vetor de números aleatórios correlacionados. Define-se $\mathbf{dz}_t = \mathbf{C}\ \boldsymbol{\omega}_t$ .Então:

$$\mathbf{cov(dz_t)} = \mathbf{E}\left(\mathbf{dz_t dz_t^T}\right) = \mathbf{E}\left(\mathbf{C}\boldsymbol{\omega}_t\boldsymbol{\omega}_t^T\mathbf{C}^T\right) = \mathbf{CIC}^T = \mathbf{CC}^T = \mathbf{S}$$

Desta maneira, é gerada a matriz de covariância para o processo de Wiener, de modo a assegurar consistência macroeconômica na correlação entre as variáveis.

Os cenários de juros, taxa de câmbio real e inflação são correlacionadas, mesmo se as variáveis se afastarem transitoriamente do equilíbrio, exatamente como ocorre historicamente. Além disso, uma estrutura apropriada de correlação pode trazer consistência macroeconômica para o modelo, sem a necessidade de gerar relações teóricas arbitrárias entre as variáveis. Com isso, temos um modelo no qual as variáveis sempre retornam para seus valores de equilíbrio, sendo que pequenos desvios do equilíbrio são permitidos.

## 6.3. Preço dos Títulos

O custo de carregamento da Dívida depende do custo de emissão de cada instrumento. Conforme demonstrado anteriormente, o preço da LTN (título prefixado) é definido pelo modelo CIR, de acordo com a equação:

$$P(t,T) = A(t,T)e^{-B(t,T)J}$$

Como a LTN é um títulos prefixado, o seu custo de carregamento é obviamente a taxa na qual ele foi emitido.

No caso das LFTs (título à taxa Selic), o modelo assume que elas são vendidas ao par, isto é, seu preço é igual ao valor de face. Seu custo, então, é definido pela taxa de juros Selic composta diariamente ao longo do período.

Os preços dos títulos indexados à inflação e ao câmbio são função da taxa prefixada de mesmo prazo ajustado por um prêmio de risco. Este prêmio representa o quanto a taxa destes papéis deve ficar abaixo da taxa prefixada de mesmo prazo. Em outras palavras, cada prêmio indica a redução aplicada à taxa prefixada em reais de modo a obter a taxa de emissão externa ou a taxa real de emissão de títulos domésticos indexados à inflação.

Estes prêmios são modelados pela equação de Nelson-Siegel, que associa um prêmio (P) e um prazo (T) dados os parâmetros $\beta_0$, $\beta_1$, $\beta_2$ e $\kappa$, de acordo com a fórmula abaixo:

$$P = \beta_0 + (\beta_1 + \beta_2 \cdot T) \cdot e^{-kT}$$

No caso dos títulos indexados à inflação, a justificativa da existência de um prêmio que títulos prefixados pagam a mais sobre uma NTN-B vem do fato de que os investidores que adquirem estes títulos estão protegidos contra variações na inflação. Com relação aos títulos da dívida externa, os investidores estão protegidos contra a volatilidade do câmbio.

O efeito do prêmio modelado pela equação de Nelson-Siegel pode ser melhor compreendido graficamente. Conforme gráfico abaixo, a curva de juros real é definida como a taxa de emissão prefixada, menos o prêmio de risco, menos a expectativa de inflação para o período. Do mesmo modo, a taxa de emissão externa é a taxa prefixada interna, menos o prêmio de risco, menos a expectativa de desvalorização cambial.

## 6.4. Custo de Carregamento

O custo de carregamento de cada grupo de títulos depende de sua caracterítica de retorno: taxa prefixada no caso das LTN; taxa SELIC no caso das LFT; taxa real mais inflação, no caso das NTN-B; e cupom cambial mais variação cambial, no caso dos títulos da dívida externa.

Como foi assumido que as LFTs são vendidas ao par, o seu custo de carregamento é simplesmente a taxa SELIC sobre o período:

$$R_t^{LFT} = J_t$$

O custo de carregamento das LTNs em cada período é a média ponderada dos custos de emissão de todas as LTN que ainda estão no estoque, conforme equação abaixo:

$$R_t^{LTN} = \sum_{s=0}^{n} \omega_{t-s} r_{t-s}$$

Onde, cada $\omega_{t-s}$ é um percentual em t da dívida prefixada emitida em t-s; e $r_{t-s}$ é o custo de emissão da LTN em t-s.

Para os títulos indexados ao câmbio o custo de carregamento é composto pela combinação entre a evolução da taxa de câmbio nominal e o cupom de juros, ponderada pelos títulos no estoque. Este custo médio $R_t^C$ é calculado de forma similar:

$$R_t^C = \sum_{s=0}^{n} \omega_{t-s}^c r_{t-s}^c$$

Onde cada $\omega_{t-s}^C$ é um percentual do estoque de títulos cambiais no momento *t* e que foram emitidos em *t-s*; e $r_{t-s}^c$ é o cupom de juros emitidos no momento *t-s*.

Se acrescentarmos a variação do câmbio (*dN/N*), o custo total da dívida cambial é dado por:

$$R_t^{FX} = \left(1 + \frac{dN_t}{N_t}\right)(1 + R_t^C) - 1$$

O custo dos títulos indexados à inflação (NTN-B) é calculado de maneira similar ao custo dos títulos indexados ao câmbio. A taxa de juros real para cada período, $R_t^I$, também é calculada como a média de todas as taxas reais do estoque:

$$R_t^I = \sum_{s=0}^{n} \omega_{t-s}^i r_{t-s}^i$$

Onde $\omega_{t-s}^i$ é um percentual em *t* do estoque de títulos indexados à inflação em *t-s*; e $r_{t-s}^i$ é a taxa de juros real de um título emitido em *t-s*. Considerando-se a correção pela inflação (*dI/I*) adicionalmente à taxa real, o custo de carregamento das NTN-Bs é dado por:

$$R_t^{NTN-B} = \left(1 + \frac{dI_t}{I_t}\right)\left(1 + R_t^I\right) - 1$$

O custo total, para qualquer composição da DPF, é dado pela média ponderada do custo de carregamento de cada instrumento. Este custo é necessário para o cálculo do custo da DPF e, conseqüentemente, para a dinâmica da DLSP:

$$R_t^D = \lambda_{LFT} R^{LFT} + \lambda_{LTN} R^{LTN} + \lambda_{FX} R^{FX} + \lambda_{NTN-B} R^{NTN-B}$$

Onde $R_t^D$ é o custo de carregamento da carteira; e $\lambda_{LFT}, \lambda_{LTN}, \lambda_{NTN-B}, \lambda_{FX}$ representa a participação de cada tipo de título na composição da carteira escolhida.